Théorème 48 — Preuve pour $r=2$

Soient $\lambda_1 \neq \lambda_2$ deux valeurs propres distinctes et $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ des vecteurs propres associés. Alors $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont lin. indépendants.

En effet : Soit $\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} = \vec{0}$ une comb. lin.

Par hypothèse, on a $A\vec{v_1} = \lambda_1 \vec{v_1}$ et $A\vec{v_2} = \lambda \vec{v_2}$.

Calculons :

$$\vec{0} = A(\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2}) = \alpha_1 A\vec{v_1} + \alpha_2 A\vec{v_2} = \alpha_1 \lambda_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v_2}.$$

$$\vec{0} = \lambda_2 (\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2}) = \lambda_2 \alpha_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \alpha_2 \vec{v_2}.$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient

$$\vec{0} = \alpha_1 \lambda_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v_2} - (\lambda_2 \alpha_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \alpha_2 \vec{v_2})$$

d'où $$(\alpha_1 \lambda_1 - \lambda_2 \alpha_1) \vec{v_1} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2) \vec{v_1} = \vec{0}$$

- $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ car les valeurs propres sont distinctes.
- $\vec{v_1} \neq \vec{0}$ car c'est un vecteur propre.

Donc on a $\underline{\alpha_1 = 0}$.

La comb. linéaire $\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} = \vec{0}$ devient $\alpha_2 \vec{v_2} = 0$.

Comme $\vec{v_2}$ est un vecteur propre, il est non nul et on en déduit que $\underline{\alpha_2 = 0}$.

$\Rightarrow$ $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont lin. indépendants.